CHAPITRE 4

DISTANCE

SYMETRIE ORTHOGONALE

1 La distance

On cherche à établir une mesure dans le plan dont les propriétés traduisent le mode d'emploi du compas qui permet de transporter les segments et de graduer la droite. Ainsi, à tout couple de points du plan, on associe un et un seul nombre réel positif. Pour cela, on pose l'axiome suivant.

AXIOME DE LA DISTANCE (Pour l'usage du compas et de la règle graduée)

On admet une application $\delta : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \to \mathbb{R}_+$

$$(A,B) \mapsto x = \delta(A,B)$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1 $\delta(A,B) = 0$ **si et seulement si** $A = B$

2 $\delta(A,B) = \delta(B,A)$

3 $\delta(A,C) \leq \delta(A,B) + \delta(B,C)$ **et**

$\delta(A,C) = \delta(A,B) + \delta(B,C)$ **si et seulement si** $B \in [A,C]$.

4 **Pour toute demi-droite [A,B), l'application**

$$f : [A,B) \to \mathbb{R}_+$$
$$M \mapsto x = \delta(A,M) = f(M)$$

est bijective.

Remarques

1 La distance est une application, la distance de deux points est un nombre.

2 On appelle aussi **longueur** d'un segment la distance de ses extrémités.

Exercices

1 *Quelle partie de l'axiome dit*

a) où l'on commence la mesure;

b) pourquoi l'on peut échanger les pointes du compas;

c) quand on peut construire un triangle à l'aide de trois segments;

d) où l'on place 0 *sur une règle;*

e) pourquoi les "pas" sont réguliers sur une règle;

f) comment on choisit les nombres sur une règle?

2 *A-t-on* $A \in [B,C]$ *si*

a) $\delta(A,B) = 3.2$ *et* $\delta(B,C) = 8$ *et* $\delta(A,C) = 4.8$?

b) $\delta(A,B) = 5.8$ *et* $\delta(B,C) = 2.4$ *et* $\delta(A,C) = 7.7$?

3 *Trouver* x *si* $\delta(A,B) = 5.1$, $\delta(A,C) = 1.5$, $\delta(B,C) = x$ *et* $A \in (BC)$.

4 *Si* $\delta(A,B) = 39.38$, $\delta(B,C) = 27.02$ *et* $\delta(C,A) = 12.36$, *a-t-on* $A \in (BC)$?

5 *Si* $\delta(A,B) = 21.11$, $\delta(B,C) = 56.30$ *et* $\delta(C,A) = 75$, *les points* A, B, C *sont-ils alignés?*

6 *Peut-on trouver trois points* A, B, C *tels que* $\delta(A,B) = 8.3$, $\delta(B,C) = 1.74$ *et* $\delta(C,A) = 5.26$?

7 *Comment choisir* x *si* $A \notin (BC)$ *et* $\delta(A,B) = x$, $\delta(B,C) = 7{,}5$ *et* $\delta(A,C) = 8{,}2$?

Définition 1 M est **milieu** du segment [A,B] si et seulement si $M \in [A,B]$ et $\delta(A,M) = \delta(M,B)$.

Exercice 8

Démontrer que l'on a M *milieu de* [A,B] $\Leftrightarrow \delta(A,M) = \frac{1}{2}\,\delta(A,B) = \delta(M,B)$.

Démontrer l'existence et l'unicité de M *à l'aide de la bijection* f *d'une demi-droite vers* $\mathbb{R}_+$.

Définition 2 Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

Le **cercle de centre O et de rayon r** est l'ensemble des points M du plan tels que $\delta(O,M) = r$.

Notation: $\mathcal{C}_{(O,r)} = \{ M \in \mathbb{P} \mid \delta(O,M) = r \}$

Une **corde** est soit une droite passant par deux points distincts du cercle, soit le segment admettant ces deux points pour extrémités.

Un **diamètre** est une corde passant par le centre.

Le **disque** $\mathcal{D}_{(O,r)}$ est l'ensemble $\{ M \in \mathbb{P} \mid \delta(O,M) \leq r \}$.

L'intérieur d'un disque, ou **disque ouvert**, est l'ensemble $\mathcal{D}_{(O,r)} - \mathcal{C}_{(O,r)}$.

<u>Remarque</u>

Le rayon est un nombre, mais si $A \in \mathcal{C}_{(O,r)}$ on appelle aussi rayon le segment $[O,A]$.

Exercices

9 *Les propositions suivantes sont-elles vraies?* $\mathcal{C}_{(O,r)} \neq \varnothing$; $\mathcal{D}_{(O,r)} \neq \varnothing$; $O \notin \mathcal{C}_{(O,r)}$; $O \in \mathcal{D}_{(O,r)}$.

10 *Démontrer que, si* $r_1 > r_2$ *alors* $\mathcal{C}_{(O,r_1)} \cap \mathcal{C}_{(O,r_2)} = \varnothing$ *et* $\mathcal{D}_{(O,r_1)} \cap \mathcal{D}_{(O,r_2)} = \mathcal{D}_{(O,r_2)}$ *et* $\mathcal{C}_{(O,r_2)} \cap \mathcal{D}_{(O,r_1)} = \mathcal{C}_{(O,r_2)}$.

11 *Démontrer que le diamètre est la plus longue des cordes.*

2 Le demi-plan

Avec une paire de ciseaux (à l'aide d'une droite), on peut couper une feuille de papier (le plan) en deux parties. Ce découpage doit respecter les anciens axiomes et il est fixé par l'axiome suivant.

AXIOME DU DEMI-PLAN

A toute droite d du plan $\mathbb{P}$ est associée une partition $\{ \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, d \}$ telle que:

1 **toute droite strictement parallèle à d est incluse dans l'un des demi-plans ouverts $\mathbb{P}_1$ ou $\mathbb{P}_2$;**

2 **toute droite sécante à d est partagée en deux demi-droites ouvertes opposées l'une dans $\mathbb{P}_1$, l'autre dans $\mathbb{P}_2$.**

Exercice 12

A quel ancien axiome se rapporte la partie 1 de l'axiome du demi-plan? Et la partie 2 ? L'axiome de la droite est-il nécessaire à la formulation de l'axiome du demi-plan?

Définition 3 La droite d de la partition $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, d\}$ se nomme la **frontière** de chaque demi-plan.

On appelle **demi-plan fermé** la réunion de l'un des demi-plans et de sa frontière. On note $\overline{\mathbb{P}_1} = \mathbf{P}_1 \cup d$.

Les demi-plans $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$ de frontière d sont aussi appelés les deux **côtés** de la droite d.

Définition 4

On appelle **bande** $\mathcal{B}$ l'intersection de deux demi-plans fermés tels que chaque demi-plan ouvert contient la frontière de l'autre.

Les frontières des demi-plans sont appelées **frontières** de la bande.

Exercice 13

Théorème. *Si deux points* A *et* B *appartiennent l'un à* $\mathbb{P}_1$ *l'autre à* $\mathbb{P}_2$*, il existe exactement un point de la frontière* d *appartenant au segment* [A,B].

Définition 5 Un **parallélogramme** est l'intersection de deux bandes dont les frontières sont respectivement sécantes.

Exercice 14

Donner une définition des côtés du parallélogramme, des sommets, des ***sommets consécutifs****, des sommets opposés, des diagonales (segments ou droites), de l'intérieur.*

Définition 6 Un parallélogramme est un **rectangle** si les frontières des bandes sont respectivement orthogonales.

Définition 7 Soit trois points A, B et C tels que A appartient à un demi-plan ouvert $\mathbb{P}_1$ de frontière (BC), B à un demi-plan ouvert $\mathbb{P}_2$ de frontière (AC) et C à un demi-plan ouvert $\mathbb{P}_3$ de frontière (AB).

On appelle **triangle** ABC l'intersection des trois demi-plans fermés:
$\Delta ABC = \overline{\mathbb{P}_1} \cap \overline{\mathbb{P}_2} \cap \overline{\mathbb{P}_3}$.

Les points A, B et C se nomment **sommets** du triangle.

Les segments [A,B] , [B,C] et [C,A] s'appellent **côtés** et leur réunion est la **frontière** du triangle.

L'ensemble $\mathbb{P}_1 \cap \mathbb{P}_2 \cap \mathbb{P}_3$ se nomme **intérieur** du triangle.

On appelle **secteur du triangle** ABC l'intersection de deux des trois demi-plans fermés.
Notation: $\overline{\mathbb{P}_2} \cap \overline{\mathbb{P}_3} = [BAC]$.

Remarque

Les droites (AB) , (AC) , (BC) s'appellent parfois côtés du triangle.

THEOREME 1 Dans un triangle, la longueur de chaque côté est comprise entre la différence et la somme des longueurs des deux autres côtés.

Définition 8 Un quadrilatère convexe ABCD est l'intersection de quatre demi-plans fermés tels que $ABCD = \overline{\mathbb{P}_1} \cap \overline{\mathbb{P}_2} \cap \overline{\mathbb{P}_3} \cap \overline{\mathbb{P}_4}$ et

$\overline{\mathbb{P}_1} - (AB) = \mathbb{P}_1$ et $\{C,D\} \subset \mathbb{P}_1$

$\overline{\mathbb{P}_2} - (BC) = \mathbb{P}_2$ et $\{A,D\} \subset \mathbb{P}_2$

$\overline{\mathbb{P}_3} - (CD) = \mathbb{P}_3$ et $\{B,A\} \subset \mathbb{P}_3$

$\overline{\mathbb{P}_4} - (DA) = \mathbb{P}_4$ et $\{C,B\} \subset \mathbb{P}_4$

Exercices

15 ***Théorème de Pasch.*** *Toute droite coupant un des côtés d'un triangle en coupe un deuxième.*

16 *Montrer que tout point appartenant à l'intérieur d'un triangle est situé entre deux points de sa frontière.*

17 *Montrer que toute droite passant par un sommet d'un triangle et un point intérieur coupe le côté opposé.*

18 ***Théorème.*** *Deux segments ayant chacun respectivement pour extrémités un sommet d'un triangle et un point du côté opposé se coupent en un point intérieur, sauf si l'un d'eux est côté du triangle.*

3 Symétrie orthogonale et isométrie

Exercice *19*

Si $A \notin d$ *et* $p_{\perp}(A) = H$ *et* $H \in d$, *pourquoi peut-on trouver un point* $A' \in (AH)$ *tel que* H *soit le milieu de* $[A,A']$? *Ce point* A' *est-il unique? Qu'obtient-on si* $A \in d$? *Pourquoi cette construction donne-t-elle une application du plan vers lui-même? Cette application est-elle une bijection? Quelle est l'image du demi-plan* $\mathbb{P}_1$ *si* $\overline{\mathbb{P}_1} = \mathbb{P}_1 \cup d$?

Définition 9 On appelle **symétrie orthogonale** d'axe d l'application $\mathcal{S}_d$ telle que

$$\mathcal{S}_d : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$$
$$A \mapsto A' = \mathcal{S}_d(A)$$

et $p_{\perp}(A) = H \in d$ et H est le milieu du segment $[A,A']$.

A' s'appelle le **symétrique** de A et, si $A \neq A'$, la droite d s'appelle la **médiatrice** du segment $[A,A']$.

Exercices

20 ***Théorème.*** $\mathcal{S}_d$ *est une bijection.* $\mathcal{S}_d$ *est involutive, c'est-à-dire, tout point est l'image de sa propre image.*

Notation: $A = \mathcal{S}_d(\mathcal{S}_d(A)) = (\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_d)(A)$ *pour la* ***composition*** *de deux applications.*

21 ***Théorème.*** *Dans une symétrie d'axe* d, *l'axe* d *est l'ensemble des points invariants.*

22 ***Théorème.*** *Dans une symétrie d'axe* d, *toute droite orthogonale à l'axe est globalement invariante et réciproquement toute droite globalement invariante différente de* d *est orthogonale à* d.

Définition 10 On appelle **isométrie** dans le plan **P** toute application du plan vers lui-même qui conserve la distance.

Définition 11 Deux ensembles de points (figures) $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont dits **isométriques** lorsqu'il existe une isométrie f transformant $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$, c'est-à-dire telle que $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$.

Pour exprimer qu'en repliant une feuille de papier on ne perd pas la distance, on admet l'axiome suivant.

AXIOME DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE

La symétrie orthogonale est une isométrie, c'est-à-dire $\delta(A,B) = \delta(\mathcal{S}_d(A), \mathcal{S}_d(B))$

THEOREME 2 Si $A \neq B$, la médiatrice du segment $[A,B]$ est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment.

<u>Remarque</u>
Ce théorème exprime l'unicité de la symétrie associant l'une des extrémités du segment à l'autre.

THEOREME 3

1. Par une isométrie,
   l'image de l'intersection de deux figures est l'intersection des images,
   l'image d'une droite est une droite,
   l'image d'une demi-droite est une demi-droite,
   l'image d'un segment est un segment,
   l'image d'un demi-plan est un demi-plan dont la frontière est l'image de la frontière,
   l'image d'un secteur est un secteur
   l'image d'une figure convexe est une figure convexe
2. L'isométrie conserve l'orthogonalité, le parallélisme, l'ordre des points et le milieu d'un segment
3. L'isométrie est une bijection.

On ne démontrera pas la plupart des points de ce théorème.

Exercices

23 *Il existe une symétrie orthogonale qui transforme un cercle en lui-même. L'axe de cette symétrie est un diamètre du cercle.*

24 *Deux cercles, qui ont un point commun hors de la droite passant par les centres, en ont un deuxième.*

25 *Comment construire le symétrique d'un point selon une droite, avec le compas? Justifier la construction. En déduire la construction d'une orthogonale à une droite par un point n'appartenant pas à la droite.*

26 *On donne* $\overline{\mathbb{P}_1} = \mathbb{P}_1 \cup d$. *Effectuer et justifier les constructions suivantes (règle et compas).*

a) Si $\{A, B\} \in \mathbb{P}_1$ *construire* $[\mathcal{S}_d(A), \mathcal{S}_d(B)]$.

b) Si $C \in \mathbb{P}_1$ *et* $D \in d$, *construire* $\mathcal{S}_d([C,D])$.

c) Si $E \in \mathbb{P} - \overline{\mathbb{P}_1}$ *et* $C \in \mathbb{P}_1$, *construire* $\mathcal{S}_d([C,E])$ *et* $[\mathcal{S}_d(C), \mathcal{S}_d(E)]$.

27 *Il existe exactement une symétrie orthogonale qui transforme les extrémités d'un segment l'une en l'autre. Comment construire l'axe de cette symétrie avec règle et compas? Comment construire une orthogonale à une droite en un point de cette droite? Justifier les constructions.*

28 *Pour un triangle* ***isocèle*** *, c'est-à-dire qui possède deux côtés de même longueur, il existe une symétrie orthogonale le transformant en lui-même.*

29 $\mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b = \mathrm{Id} \Leftrightarrow a = b$. *L'****identité*** *dans un ensemble* E *est une application de* E *vers* E, *notée* Id, *telle que* $\mathrm{Id}(x) = x$ *pour tout* $x \in E$.

30 *Construire quelques cercles passant par deux points distincts donnés.*

31 ***Théorème.*** *Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

32 *Construire le cercle passant par trois points non alignés.*
Trois points d'un cercle ne sont pas alignés.

THEOREME 4 Pour tout point M qui n'est pas élément de la droite d, le projeté orthogonal H de M sur d est plus proche de M que les autres points de d.

Réciproquement, le point de d le plus proche de M est le projeté orthogonal de M sur d.

Définition 12 La **distance d'un point P à une droite d**, notée $\delta(P,d)$, est le nombre $\delta\big(P, p_{\perp}(P)\big)$ et $p_{\perp}(P) \in d$.

Définition 13 Une droite est dite **tangente** à un cercle si et seulement si leur intersection est un singleton.

Exercice 33

Théorème, *Une droite* d *est tangente à un cercle* $C_{(O,r)}$ *en un point* M *si et seulement si* $d \perp (OM)$. *Appliction : construire la tangenze en un point* M *d'un cercle.*

4 Symétrie centrale

La recherche des axes de symétrie du rectangle permet de construire la symétrie centrale sans recourir à un nouvel axiome.

Exercice 34

Soit un rectangle ABCD *et* d *la médiatrice de* [A,B].

a) *Que deviennent les droites* (AB) *et* (CD) *lors d'une transformation par* S_d ? *Qu'advient-il des droites* (AD) *et* (BC) *par la même transformation? En déduire que* $S_d(D) = C$, *et* $S_d((AC)) = (BD)$.

b) *Si* d' *est médiatrice de* [A,D], *démontrer que l'on a* $S_{d'}(B) = C$ *et que* $d \perp d'$.

c) *En déduire qu'il existe deux symétries orthogonales dont les axes sont orthogonaux transformant le rectangle en lui-même, que les côtés opposés sont de même longueur, que les diagonales sont isométriques et se coupent en leur milieu sur les axes. (Une* ***diagonale*** *est un segment admettant pour extrémités deux sommets non consécutifs)*

Définition 14 On appelle **symétrie centrale** le composé de deux symétries orthogonales d'axes orthogonaux.

Notation

Si $a \perp b$ et $a \cap b = \{O\}$, on écrit $\mathcal{S}_O = \mathcal{S}_a \circ \mathcal{S}_b$, O étant le **centre de symétrie**.

Exercices

35 ***Théorème.*** $\mathcal{S}_O(M) = M' \Leftrightarrow$ *O milieu de* [M,M'].

36 ***Théorème.*** *Toute droite passant par le centre de symétrie est globalement invariante.*

37 ***Théorème.*** *La symétrie centrale conserve l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.*

38 ***Théorème.*** $\mathcal{S}_O(d) \parallel d$.

39 *Si* ABCD *est un rectangle de centre* O, *démontrer que les triangles* ΔAOD *et* ΔBOC *sont isométriques, de même que les triangles* ΔACD *et* ΔACB.

THEOREME 5 Le parallélogramme possède un centre de symétrie.
Réciproquement, tout quadrilatère convexe possédant un centre de symétrie est un parallélogramme.

Exercices

40 *Déduire du théorème 5 que, dans un parallélogramme* ABCD, *les diagonales se coupent en leur milieu, les côtés opposés sont isométriques et portés par des droites parallèles, les secteurs* [DAB] *et* [BCD] *sont isométriques ainsi que* [ABC] *et* [CDA]. *Il en est de même pour* [DAC] *et* [BCA] *et pour* [DCA] *et* [CAB] *appelés* ***secteurs alterne-internes.***

41 ***Théorème.*** *Si deux droites sont coupées par une sécante et qu'elles forment entre elles deux secteurs alterne-internes isométriques, alors les deux droites sont parallèles.*

42 ***Théorème.*** *Tout quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme.*

5 Critères d'isométrie des triangles

Les 4 exercices suivants illustrent le fait que la construction des isométries s'effectue avec une, deux ou trois symétries axiales.

Exercices

43 *Construire une isométrie transformant* $[A,B]$ *en* $[C,D]$ *avec* $A \neq B$ et $\delta(A,B) = \delta(C,D)$ *dans les cas suivants.*

a) $[A,B] = [C,D]$

b) $A = C$ *et* $B \neq D$

c) $[A,B] \cap [C,D] = \{M\}$ *et* M *milieu des deux segments*

d) $(AB) \cap (CD) = \varnothing$

e) $(AB) \cap (CD) = \{E\}$ *et* $[A,B] \cap [C,D] = \varnothing$.

44 *Si* $ABCD$ *est un rectangle,* A_3 *milieu de* $[A,D]$, $A \preceq A_1 \preceq A_2 \preceq B$ *avec* $\delta(A,A_1) = \delta(A_1,A_2) = \delta(A_2,B)$, A_4 *milieu de* $[B,C]$ *et* $p_\perp(A_1) = A_5 \in (A_3 A_4)$, *construire une isométrie transformant*

a) ΔAA_1A_5 *dans* ΔA_2BA_4

b) ΔAA_1A_5 *dans* ΔAA_3A_5

c) ΔAA_3A_5 *dans* ΔA_2BA_4

45 ***Théorème.*** *Si une isométrie transforme le secteur* $[ABC]$ *dans le secteur* $[A'B'C']$ *avec* $\delta(B,A) = \delta(B',A')$ *et* $\delta(B,C) = \delta(B',C')$, *alors* $\delta(A,C) = \delta(A',C')$.

46 ***Théorème.*** *Si* $A \notin (BC)$ *avec* $\delta(A,B) = \delta(A',B')$, $\delta(A,C) = \delta(A',C')$, $\delta(B,C) = \delta(B',C')$, *on se propose de construire une isométrie transformant le* ΔABC *dans* $\Delta A'B'C'$ *en composant des symétries orthogonales dans les cas suivants.*

a) $A = A'$, $B = B'$ *et* $C \neq C'$

b) $A = A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$ *(distinguer les cas)*

c) $\Delta ABC \cap \Delta A'B'C' = \varnothing$

Avec les exercices 45 et 46, on a démontré deux des **trois cas traditionnels d'isométrie des triangles.** On peut aussi démontrer le premier critère suivant en composant judicieusement des symétries orthogonales.

Trois critères d'isométrie des triangles

Deux triangles qui ont un côté de même longueur, commun à deux secteurs respectivement isométriques, sont isométriques.

Deux triangles qui ont un secteur isométrique et dont les frontières portent des côtés respectivement de même longueur sont isométriques.

Deux triangles qui ont leurs trois côtés respectivement de même longueur sont isométriques.

Exercices

47 *On donne un quadrilatère convexe* ABCD *avec* $\delta(A,B) = \delta(C,D)$, $\delta(A,D) = \delta(B,C)$ *et* d *médiatrice de* $[A,C]$.

a) *Si* $\mathcal{S}_d(D) = D'$, $\mathcal{S}_d(B) = B'$, *comparer* $\delta(C,D')$ *et* $\delta(C,B)$, $\delta(A,D')$ *et* $\delta(A,B)$. *En déduire que* (AC) *est la médiatrice de* $[B,D']$.

Montrer que (AC) *est aussi médiatrice de* $[B',D]$.

b) *Démontrer que* $\mathcal{S}_{(AC)}(AD'CB') = ABCD$.

c) *Avec* $(AC) \perp d$ *et* $(AC) \cap d = \{O\}$ *on a* $\mathcal{S}_d \circ \mathcal{S}_{(AC)} = \mathcal{S}_O$ *et* $\mathcal{S}_O(A) = C$, $\mathcal{S}_O(B) = D$ *et* ABCD *est un parallélogramme.*

Théorème. *Tout quadrilatère convexe dont les côtés opposés sont deux à deux de même longueur est un parallélogramme.*

Application : construire par un point A *une parallèle à une droite* d.

48 ***Théorème.*** *Tout quadrilatère convexe dont deux côtés isométriques sont portés par des parallèles est un parallélogramme.*

49 ***Théorème.*** *Dans un quadrilatère convexe* ABCD *, si les secteurs* [BAC] *et* [DCA] *sont isométriques, de même que les secteurs* [DAC] *et* [BCA] *, alors* ABCD *est un parallélogramme.*

50 ***Définition.*** *Un* ***<u>triangle rectangle</u>*** *est un triangle qui a deux côtés orthogonaux. Les côtés orthogonaux se nomment* ***<u>cathètes</u>*** *et le troisième côté* ***<u>hypoténuse</u>*** *.*

Théorème. *Deux triangles rectangles qui ont un cathète et l'hypoténuse respectivement isométriques sont isométriques.*

51 ***Théorème.*** *Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu est un rectangle.*

Corollaire. *Dans un triangle rectangle, la médiane sur l'hypoténuse a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse. Réciproquement, si dans un triangle une médiane a pour longueur la moitié de celle du côté sur lequel elle tombe, ce triangle est rectangle.*

Théorème du cercle de Thalès. *Le cercle de diamètre* $[A,B]$ *, à l'exclusion de* A *et* B *, est l'ensemble des sommets* C *des triangles rectangles d'hypoténuse* $[A,B]$.

Applications :

a) *Sans prolonger une demi-droite* $[A,B)$ *, construire en* A *l'orthogonale à* (AB).

b) *Construire les tangentes à un cercle par un point n'appartenant pas au cercle.*

52 ***Théorème.*** *Les médiatrices des cathètes d'un triangle rectangle se coupent sur l'hypothénuse. Réciproquement, si les médiatrices de deux côtés d'un triangle se coupent sur le troisième, le triangle est rectangle.*

53 *Un triangle qui a deux hauteurs isométriques est isocèle.*

54 *Sur les côtés* $[A,B]$, $[B,C]$ *et* $[C,A]$ *d'un triangle équilatéral (trois côtés isométriques), on définit respectivement les points* A', B', *et* C' *tels que* $\delta(A,A') = \delta(B,B') = \delta(C,C')$. *Démontrer que le triangle* $A'B'C'$ *est équilatéral.*

55 *Dans un triangle* ABC, *si* M *est milieu de* $[B,C]$, *alors* (AM) *est équidistante de* B *et* C.

56 *Sur les côtés isométriques* $[A,B]$ *et* $[A,C]$ *d'un triangle isocèle, on donne respectivement deux points* M *et* N *tels que* $\delta(B,M) = \delta(C,N)$. *Montrer que* $(MN) \parallel (BC)$.

6 Exercices complémentaires

<u>*Paragraphe 1*</u>

57 *Indiquer comment, en utilisant deux fois l'axiome de la distance, on peut graduer toute droite, c'est-à-dire construire une bijection* g *de* d *vers* $\mathbb{R}$ *appelée* ***<u>graduation</u>***. *On dira alors qu'il y a autant de points sur la droite* d *que de nombres dans* $\mathbb{R}$.

58 *Si* $g : d \to \mathbb{R}$, *et* g *est une graduation de* d *telle que* $g(A) = 0$ *et* $g(B) = 10$, *trouver* $g(M)$ *et* $g(N)$ *si* M *est milieu de* $[A,B]$ *et* N *milieu de* $[A,M]$. *Si* C *est milieu de* $[M,B]$, *comment trouver le nombre* $g(C)$ *appelé* ***<u>abscisse</u>*** *du point* C *dans la graduation* g?

59 $\{ \complement_{\mathbb{P}} \mathcal{D}_{(O,r)}, \mathcal{C}_{(O,r)}, \mathcal{D}_{(O,r)} - \mathcal{C}_{(O,r)} \}$ *est une partition du plan.*

Paragraphe 2

60 **Théorème.** *Dans une projection* $p_d : d_1 \to d_2$ *, si* d *n'est pas parallèle à* d_1*, l'image d'une demi-droite est une demi-droite.*

61 **Théorème.** *Dans une projection parallèle, l'image d'un segment est un segment.*

62 *Démontrer que les segments diagonaux d'un quadrilatère convexe se coupent.*

63 *Démontrer qu'il existe toujours une bijection d'un segment* [A,B] *sur un segment* [C,D] *si* $A \neq B$ *et* $C \neq D$. *Indication: Si* $A \neq C$, *utiliser* $p_{(AC)} : (AB) \to (CE)$ *avec* $E \notin (CD)$ *et* $p_{(AC)}(B) = E$, *puis* $p_{(ED)} : (CE) \to (CD)$.

64 *Pour tout point* P *de l'intérieur d'un triangle, la somme des distances de* P *à deux sommets est strictement inférieure à la somme des distances de ces deux sommets au troisième.*

Paragraphe 3

65 *a)* *Si* $(AB) = d$, *qu'est-ce que* $\mathcal{S}_d([A,B])$?

b) *Si* $(AB) \perp d$ *et* $A \preceq B \preceq C$ *et* B *milieu de* [A,C], *qu'est-ce que* $\mathcal{S}_d([A,C])$?

c) *Si* $(AB) \cap d = \{A\}$ *et* $(AB) \perp d$, *qu'est-ce que* $\mathcal{S}_d([A,B])$?

d) *Si* $(AB) \perp d$ *et* $[A,B] \cap d = \varnothing$, *qu'est-ce que* $\mathcal{S}_d([A,B])$?

66 *Traduire en français,* f isométrie $\Leftrightarrow$ $\delta(A,B) = \delta(f(A),f(B))$.

67 **Théorème.** *Par une isométrie, trois points alignés ont pour image trois points alignés. De même, l'image de trois points non alignés ne donne pas trois points alignés.*

68 *Par une symétrie orthogonale,*

1. *le milieu d'un segment est conservé;*
2. *l'alignement et l'ordre des points sont conservés;*
3. *l'image d'une droite est une droite.*
4. *l'image de l'intersection de deux figures est l'intersection des images;*
5. *l'image d'une demi-droite est une demi-droite;*
6. *l'image d'un segment est un segment;*
7. *l'image d'un demi-plan est un demi-plan dont la frontière est l'image de la première frontière;*
8. *l'image d'un secteur d'un triangle est un secteur;*
9. *l'image d'une figure convexe est une figure convexe.*

69 *Si* $O \in d$, *alors* $(M \in \mathcal{C}_{(O,r)} \Rightarrow \mathcal{S}_d(M) \in \mathcal{C}_{(O,r)})$ *et* $(M \notin \mathcal{C}_{(O,r)} \Rightarrow \mathcal{S}_d(M) \notin \mathcal{C}_{(O,r)})$.

Si $A \in \mathcal{C}_{(O,r)}$ *alors* $\mathcal{S}_a(A) \in \mathcal{C}_{(\mathcal{S}_a(O),r)}$.

70 *Soit* M *le milieu du côté* [B,C] *d'un triangle* ABC, $B' = \mathcal{S}_{(AM)}(B)$, $C' = \mathcal{S}_{(AM)}(C)$. *Démontrer que* B', C', M *sont alignés, que* M *est le milieu de* [B',C'] *et que* B, C, B', C' *sont sur un cercle.*

71 *Démontrer que deux cercles distincts ont au plus deux points communs.*

72 *Démontrer que l'isométrie conserve la distance d'un point à une droite.*

73 *Avec* $M \notin d$ *et* $H = p_{\perp}(M)$ *et* $\{H, A, B\} \subset d$, *démontrer que si* $\delta(A,H) = \delta(B,H)$ *alors* $\delta(A,M) = \delta(B,M)$, *et si* $\delta(A,H) < \delta(B,H)$ *alors* $\delta(A,M) < \delta(B,M)$; *énoncer et démontrer les réciproques.*

74 *Démontrer que dans un triangle, la somme des longueurs des* <u>***hauteurs***</u> *(segment ayant pour extrémités un sommet et sa projection orthogonale sur le côté opposé) est inférieure au* <u>***périmètre***</u> *(somme des longueurs des côtés).*

75 *Démontrer que dans un triangle, la plus longue hauteur est plus courte que le plus long côté.*

<u>*Paragraphe 4*</u>

76 *Démontrer qu'il existe des symétries centrales transformant les figures suivantes en elles-mêmes.*
$\varnothing$, $\{A\}$, $\{A, B\}$, $[A,B]$, $\mathcal{C}_{(O,r)}$, $\mathcal{D}_{(O,r)}$.